

А.Ю. Маракулин

Старт

в параметры

аналитический метод

8–9 класс

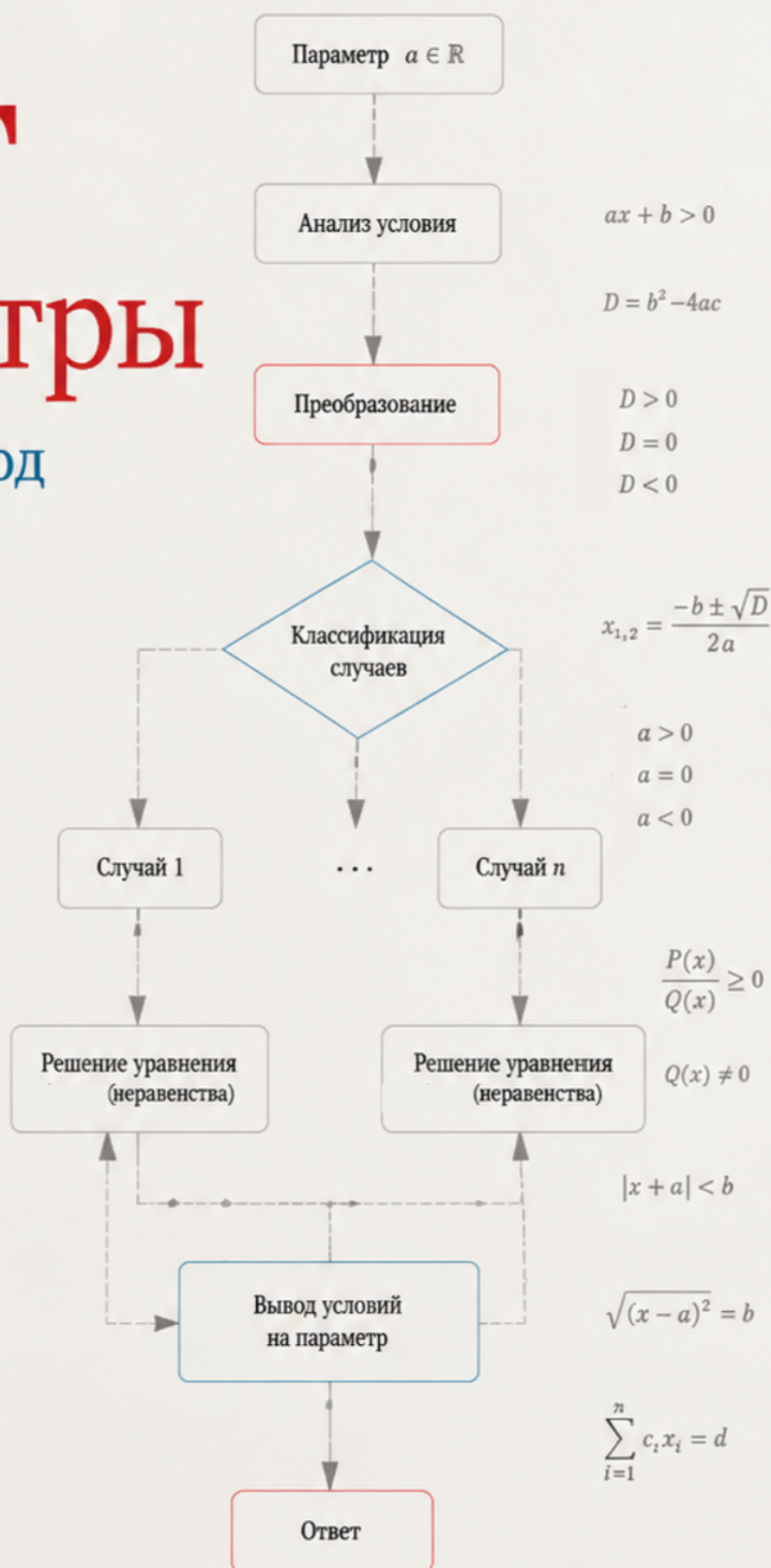
Линейные уравнения
и неравенства

Квадратные уравнения
и неравенства

Рациональные уравнения
и неравенства

Иррациональные уравнения
и неравенства

Уравнения и неравенства,
содержащие модуль



Более
50 задач

15 уроков
с задачами для

Содержание

1	Линейные уравнения и неравенства	3
	Урок 1. Линейные уравнения	3
	Урок 2. Уравнения с параметром в знаменателе	6
	Урок 3. Линейные неравенства	8
	Урок 4. Неравенства с параметром в знаменателе	11
2	Рациональные уравнения и неравенства	15
	Урок 5. Рациональные уравнения	15
	Урок 6. Рациональные неравенства	19
3	Квадратные уравнения и неравенства	23
	Урок 7. «Квадратные» уравнения	23
	Урок 8. Количество корней «квадратного» уравнения	27
	Урок 9. «Квадратные» неравенства	29
4	Расположение корней квадратного уравнения	34
	Урок 10. Расположение корней квадратного уравнения относительно одного числа	34
	Урок 11. Расположение корней уравнения относительно двух чисел	41
5	Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля	48
	Урок 12. Уравнения, содержащие знак модуля	48
	Урок 13. Неравенства, содержащие знак модуля	51
6	Иррациональные уравнения и неравенства	55
	Урок 14. Иррациональные уравнения	55
	Урок 15. Иррациональные неравенства	60
	Ответы	63
	Ответы на задачи для самостоятельного решения	63

Предисловие

Задачи с параметрами часто вызывают затруднения. Увидев вместо привычных чисел буквенные обозначения, многие ученики воспринимают это как сигнал о повышенной сложности. Однако за этой внешней формой скрывается важная математическая идея, которая делает алгебру глубже и интереснее.

Параметр — это не просто буква, а ключ к целому семейству уравнений. Как будет показано уже на первом уроке, одно уравнение с параметром a объединяет в себе множество обычных задач. Изменяя значение параметра, можно переходить от одного уравнения к другому, получая разные результаты. Параметр превращает статичную задачу в динамичную систему, где ответ напрямую зависит от условий.

Именно эта особенность превращает решение в полноценное **исследование**. В обычном уравнении цель — найти конкретный корень. Здесь же параметр требует остановиться и проанализировать: «А что происходит с задачей при разных условиях?». Формируется умение видеть скрытые связи, определять границы существования решений и понимать структуру задачи, а не просто применять алгоритмы. Этот навык пригодится не только на олимпиадах, но и при изучении старших разделов математики.

Сборник создан именно для того, чтобы помочь освоить этот исследовательский подход. Материал выстроен как надежная лестница, где каждая ступенька опирается на предыдущую:

- **Глава 1** начинает с фундамента — линейных уравнений и неравенств. Здесь закладывается базовая логика: умение разбивать задачу на случаи и анализировать коэффициенты.
- **Главы 2 и 3** усложняют поле для изучения, добавляя дроби и квадраты. Осваивается работа с ограничениями, дискриминантом и теоремой Виета как с инструментами анализа.
- **Глава 4** открывает тему расположения корней — уровень, где алгебра встречается с геометрической интуицией и графическим представлением.
- **Главы 5 и 6** учат системному подходу к модулям и иррациональным выражениям, снимая страх перед сложными конструкциями.

Каждый урок в этой книге — это шаг к пониманию. Примеры разбираются подробно, чтобы был виден ход мысли исследователя, а не просто готовый алгоритм. Задачи для самостоятельного решения в конце глав позволят проверить, действительно ли понята логика материала.

Не стоит бояться ошибок. В исследовании ошибка — это не провал, а часть пути к истине. Параметр прощает неточности тем, кто готов разбираться в сути. Достаточно открыть первую страницу и начать своё первое исследование — и станет ясно, насколько это интересно.

Старт дан. Твой путь в параметры начинается сейчас!

1. Линейные уравнения и неравенства

Урок 1. Линейные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$a(a-2)^2x = 5(a-2).$$

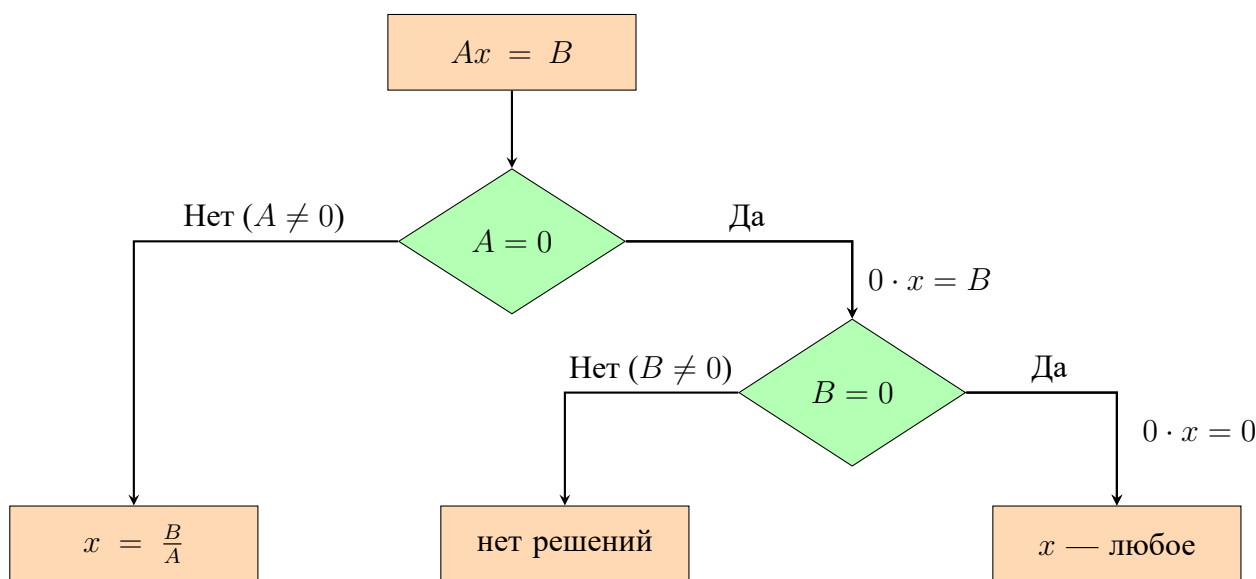
Данное уравнение содержит неизвестную x в первой степени, поэтому является линейным, а также содержит переменную a , которая называется **параметром**. По сути, данное уравнение задаёт целое семейство уравнений. При каждом значении параметра a получается одно из уравнений данного семейства.

Например, при $a = 3$ получим уравнение $3x = 5$;
 при $a = 2$ получим уравнение $0 \cdot x = 0$;
 при $a = 0$ получим уравнение $0 \cdot x = -10$.

Решить уравнение с параметром значит решить уравнение для каждого значения параметра.

Уравнение, которое с помощью равносильных преобразований можно свести к виду $Ax = B$ называют **линейным**.

Рассмотрим алгоритм решения линейного уравнения $Ax = B$.



Согласно данной схеме запишем пошаговый алгоритм решения уравнения вида $Ax = B$.

- 1) Если $A \neq 0$, то поделим обе части уравнения на A , получим $x = \frac{B}{A}$
- 2) Если $A = 0$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = B$ и возможны 2 случая:
 - а) если $B \neq 0$, то корней нет;
 - б) если $B = 0$, то x — любое.

Запись ответа — важный этап решения задачи с параметром.

Пример 1. Решите уравнение $(a - 2)x = 5$.

Решение. Заметим, что данное уравнение имеет вид $Ax = B : \underbrace{(a - 2)}_A x = \underbrace{5}_B$.

Рассмотрим случаи по алгоритму:

1) Если $a - 2 \neq 0$, т. е. $a \neq 2$, поделим обе части уравнения на $a - 2$, получим $x = \frac{5}{a - 2}$.

2) Если $a = 2$, уравнение примет вид $0 \cdot x = 5$, решений нет.

Ответ: $x = \frac{5}{a - 2}$ при $a \neq 2$;
нет решений при $a = 2$.

Пример 2. Решите уравнение $(a - 2)^2 x = 5(a - 2)$.

Решение. Заметим, что данное уравнение имеет вид $Ax = B : \underbrace{(a - 2)^2}_A x = \underbrace{5(a - 2)}_B$.

Рассмотрим случаи по алгоритму:

1) Если $(a - 2)^2 \neq 0$, $a \neq 2$, поделим обе части уравнения на $(a - 2)^2$, получим $x = \frac{5}{a - 2}$.

2) Если $a = 2$, уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, x — любое.

Ответ: $x = \frac{5}{a - 2}$ при $a \neq 2$;
 x — любое при $a = 2$.

Пример 3. Решите уравнение $a(ax - 2) = 5(ax - 2)$.

Решение. Приведём данное уравнение к виду $Ax = B$:

перепишем уравнение	$a(ax - 2) = 5(ax - 2);$
раскроем скобки	$a^2x - 2a = 5ax - 10;$
перегруппируем слагаемые	$a^2x - 5ax = 2a - 10;$
разложим на множители	$\underbrace{a(a - 5)}_A x = \underbrace{2(a - 5)}_B.$

Рассмотрим случаи по алгоритму:

1) Если $a(a - 5) \neq 0$, т. е. $a \neq 0$ и $a \neq 5$, поделим на $a^2 - 5a$, получим $x = \frac{2(a - 5)}{a(a - 5)} = \frac{2}{a}$.

2) Если $a = 5$, уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, x — любое.

3) Если $a = 0$, уравнение примет вид $0 \cdot x = -10$, решений нет.

Ответ: $x = \frac{2}{a}$ при $a \neq 5$ и $a \neq 0$;
 x — любое при $a = 5$;
нет решений при $a = 0$.

Пример 4. Решите уравнение $\frac{ax}{3} + \frac{a+x}{2} = 1$.

Решение. Приведём данное уравнение к виду $Ax = B$:

перепишем уравнение	$\frac{ax}{3} + \frac{a+x}{2} = 1;$
приведём к общему знаменателю	$\frac{2ax}{6} + \frac{3(a+x)}{6} = \frac{6}{6};$
умножим на 6 (на знаменатель)	$2ax + 3(a+x) = 6;$
раскроем скобки	$2ax + 3a + 3x = 6;$
перегруппируем слагаемые	$2ax + 3x = 6 - 3a;$
вынесем x за скобки	$\underbrace{(2a+3)}_A x = \underbrace{6-3a}_B.$

Рассмотрим случаи по алгоритму:

1) Если $2a + 3 \neq 0$, т. е. $2a \neq -3$, $a \neq -\frac{3}{2}$, поделим на $2a + 3$, получим $x = \frac{6 - 3a}{2a + 3}$.

2) Если $a = -\frac{3}{2}$, уравнение примет вид $0 \cdot x = 6 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$, $0 \cdot x = 10,5$, решений нет.

Ответ: $x = \frac{6 - 3a}{2a + 3}$. при $a \neq -\frac{3}{2}$;

нет решений при $a = -\frac{3}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение:

1) $(3 - a)x = 2(a - 3);$

2) $(a - 3)x = 4(3 - a).$

2. Решите уравнение:

1) $(3 - a)ax = 2(a - 3);$

2) $(a - 3)ax = 4(3 - a).$

3. Решите уравнение:

1) $a(3 - ax) = 2(ax - 3);$

2) $a(ax - 3) = 4(3 - ax).$

4. Решите уравнение:

1) $(1 - a^2)x = a - 1;$

2) $(a^2 - 4)x = a - 2.$

5. Решите уравнение:

1) $a(a - 2)^2x = 5(a - 2).$

2) $a(a - 3)^2x = 4(3 - a).$